# משפט לייבניץ (Leibniz)

תהי סדרה המקיימת כך ש. אזי:

1. הטור מתכנס
2. הסכום S של הטור מקיים
3. הm-שארית מתכנסת אף היא ומקיימת

אפשר להחליף את ה ב בכל המשפט.

## הוכחה

1. נתבונן ב. נכניס סוגריים:. כל איבר בתוך סוגריים הוא איבר חיובי(לא שלילי). מכאן שהסדרה היא סדרה עולה(לא יורדת).  
   אבל . שוב כל איבר בתוך סוגריים הוא חיובי(לא שלילי), ולכן הסדרה חסומה מלעיל ע"י , ולכן היא מתכנסת.  
    לכןמכאן   
   אמנם יהי צ"ל שקיים N כך שאם אזי   
   קיים כך שאם אזי וקיים כך שאם אזי נבחר ב ואז אם מתקיים
2. לכן .  
    לכן
3. . עבור:

עבור m זוגי נקבל טור המקיים את התנאים של א' וב' ולכן הוא מקיים את א' וב'.

עבור m אי זוגי אפשר לכפול ב ואז שוב מקבלים טור המקיים את התנאים.

## דוגמה

נתבונן בטור אזי

משפט לייבניץ לא מתקיים שכן האיברים לא שואפים לאפס באופן מונוטוני

התכנסות בהחלט

# הגדרה

נגיד שהטור מתכנס בהחלט אם (ז"א מתכנס). אם מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט נגיד שהטור מתכנס בתנאי.

## דוגמאות

מתכנס בהחלט, ואילו מתכנס בתנאי, שכן מחד הטור מתכנס ע"פ משפט לייבניץ, אבל הטור מתבדר ל.

# משפט

אם מתכנס בהחלט אזי הוא מתכנס.

## הוכחה

יהי . מספיק להוכיח שתנאי קושי מתקיים, ז"א שקיים N כך שעבור מתקיים . ידוע לנו ש. לכן קיים N כך שאם אזי מכאן ע"פ אי שוויון המשולש:

# משפט

יהי טור. אם נניח שקיים . אם הטור מתכנס בהחלט ואם הטור מתבדר

## הוכחה

יישם משפט דאלמבר לטור

# משפט

1. אם הטור מתכנס אזי לאותו הסכום יתכנס כל טור שיתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים.
2. הטור עם סוגריים יכול להתכנס גם במקרה שהטור המקורי מתבדר.

## דוגמה לב)

הטור . הטור המקורי לא מתכנס.

## הוכחה של א)

נסמן את הטור שנתקבל ע"י הכנסת סוגריים ב. אזי הסדרה של סכומים חלקיים של הינה תת סדרה של הסדרה של סכומים חלקיים של , ולכן מתכנסת לאותו גבול.

# משפט(חוק החילוף)

יהי טור חיובי. אם הטור מתכנס אזי יתכנס לאותו הסכום כל טור שיתקבל ממנו ע"י שינוי כלשהו בסדר האיברים.

## הוכחה

תהי p תמורה של . ז"א כך שאם אזי (p הינה חח"ע) ולכן קיים כך ש(p היא על). עלינו להוכיח שהטור מתכנס לS באשר .

לכל קיים כך ש(קח . מכאן . לכן ו

שימו לב: הטור יתקבל מהטור ע"י שינוי סדר האיברים ולכן  *ולכן*

# הגדרה

יהי טור. נגדיר , אזי אם אזי ץ אם נגדיר האיברים בעיים. מקרה שהטור המקורי מתבדר.. אם אזי ,

# משפט

1. אם מתכנס בהחלט אזי גם הטורים ו מתכנסים ומתקיים באשר , ו
2. אם הטורים , מתכנסים אזי מתכנס בהחלט.

## הוכחה

1. מתכנס בהחלט, כלומר . כיוון שלכל n מתקיים , ע"פ קריטריות ההשוואה . באופן דומה

לכל n מתקיים . לכן כלומר

1. השתמש במשוואה , לכןולכן הטור מתכנס שכן מהווה חסם מלעיל לסכומים החלקיים.

## מסקנה

אם הטור מתכנס בתנאי אזי ,

### הוכחה

תרגיל

# משפט

יהי טור המתכנס בהחלט, אזי לאותו סכום יתכנס כל טור שנתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים

## הוכחה

נסמן את הטור עם הסדר החדש ע"י באשר הינה תמורה. מתקיים , לכן , ומכאן , . אבל ולכן

# משפט(רימן Riemann)

אם הטור מתכנס בתנאי אזי לכל יש סידור של האיברים כך שהסדר החדש מתכנס לL. גם אפשר לסדר את האיברים כך שהטור לא מתכנס בכלל.

## דוגמה

– אבל אפשר לסדר את האיברים כדי שיתכנסו לכל מספר שהוא.